Signaux et Systèmes II

Formulaire

Prof. Michael Unser

January 2021

Definitions

Signaux élementaires	
Impulsion de Kronecker	$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
Saut unité	$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
Polynôme causal de degré $N \geq 1$	$s_+^N[n] = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+N)}{N!}, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
Signaux rectangulaires	$\mathbb{1}_{[n_1 \dots n_2]}[n] = \begin{cases} 1, & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

- Transformée en z de $h[\cdot]$: $H(z) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n] z^{-n}$

Suite géometrique avec $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Espaces vectoriels de signaux discrets

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subseteq \cdots \subseteq \ell_1(\mathbb{Z}) \subseteq \cdots \subseteq \ell_2(\mathbb{Z}) \subseteq \cdots \subseteq \ell_\infty(\mathbb{Z}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$$

- Définition des espaces de signaux discrets
  - $\ell_p(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) : \|f\|_{\ell_p} < +\infty\}$
    avec $\|f\|_{\ell_p} \triangleq \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f[n]|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty) \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f[n]|, & p = +\infty. \end{cases}$
  - $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$: espace des signaux discrets à support fini (ou compact)
  - $\mathcal{D}'(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (ou $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$): espace non-restreint des signaux discrets

- Produit scalaire étendu (ou de dualité): $\langle f, g\rangle \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]g[n]$
  - $\forall f, g \in \ell_2(\mathbb{Z})$: $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_{\ell_2} \cdot \|g\|_{\ell_2}$ (Cauchy-Schwarz)
  - $\forall f \in \ell_1(\mathbb{Z})$ et $\forall g \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$: $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_{\ell_1} \cdot \|g\|_{\ell_\infty}$ (Hölder)
  - $\forall f \in D'(\mathbb{Z})$ et $\forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ avec $\mathrm{support}(g) \subseteq [-N \dots N]$

$$|\langle f, g\rangle| \le \left(\sum_{n=-N}^{N} |f[n]|\right)\left(\sup_{m\in\mathbb{Z}} |g[m]|\right) = \|f_{[-N\dots N]}\|_{\ell_1} \cdot \|g\|_{\ell_\infty}$$

Convolution de signaux discrets

- Définition: $(f * g)[n] \triangleq \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k] \cdot g[n-k] = \langle f, g[n-\cdot]\rangle$

- Conditions sous laquelle la convolution est bien définie
  - $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad (f * g) \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$
    $\big(f$ et g de longueur N_f et $N_g \quad \Rightarrow \quad (f * g)$ est de longueur $(N_f + N_g - 1)\big)$.
  - $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$ et $f \in \ell_\infty(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad (h * f) \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ (stabilité BIBO)
  - $h_1, h_2 \in \ell_1(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad (h_1 * h_2) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ (stabilité de composition)
  - $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad (f * g) \in \mathcal{D}'(\mathbb{Z})$

- Opérateur de convolution: $\mathrm{S}_h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\mathrm{S}^k : f \mapsto h * f$
  - S_h BIBO stable $\quad \Leftrightarrow \quad$ réponse impulsionnelle: $h = \mathrm{S}_h\{\delta\} \in \ell_1(\mathbb{Z})$
  - $\forall f \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$: $\|\mathrm{S}_h\{f\}\|_{\ell_\infty} = \|h * f\|_{\ell_\infty} \le \|h\|_{\ell_1} \cdot \|f\|_{\ell_\infty}$

Opérateurs de convolution

Opérateur	Notation	Réponse impulsionnelle	Fonction de transfert
Générique	$\mathrm{T}\{\}$	$h[n] = \mathrm{T}\{\delta\}[n]$	$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]z^{-n}$
Identité	$\mathrm{I}\{\ \}$	$\delta[n]$	1
Décalage ("Shift")	$\mathrm{S} : f \mapsto f[\cdot - 1]$	$\delta[n-1]$	z^{-1}
Décalage itéré	$\mathrm{S}^k : f \mapsto f[\cdot - k]$	$\delta[n-k]$	z^{-k}
Somme pondérée	$\mathrm{S}_h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[k]\mathrm{S}^k$	$h[n] = \mathrm{S}_h\{\delta\}[n]$	$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]z^{-n}$
Système d'ordre 1	$(\mathrm{I} - z_0\mathrm{S})^{-1}\{\ \}$	$(z_0)^n u[n]$	$\frac{1}{1 - z_0 z^{-1}}$ avec $\lvert z_0\rvert < 1$
Système itéré	$(\mathrm{I} - z_0\mathrm{S})^{-N}\{\ \}$	$s_+^{N-1}[n](z_0)^n$	$\frac{1}{(1 - z_0 z^{-1})^N}$ avec $\lvert z_0\rvert < 1$
Différence finie	$(\mathrm{I} - \mathrm{S})\{\}$	$\delta[n] - \delta[n-1]$	$1 - z^{-1}$
Différences finies d'ordre n	$(\mathrm{I} - \mathrm{S})^N\{\}$	$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}(-1)^k\delta[n-k]$	$(1 - z^{-1})^N$

Table de convolutions discrètes

$f_1[n]$	$f_2[n]$	$(f_1 * f_2)[n]$	
$f[n]$	$\delta[n-n_0]$	$f[n-n_0]$	
$a^n\, u[n]$	$u[n]$	$\left(\frac{a}{a-1}a^n - \frac{1}{a-1}\right)u[n]$	si $a \neq 1$
$a^n\, u[n]$	$b^n\, u[n]$	$\left(\frac{a}{a-b}a^n - \frac{b}{a-b}b^n\right)u[n]$	si $a \neq b$
$u[n]$	$u[n]$	$(n+1)u[n] = s_+^1[n]$	
$a^n\, u[n]$	$a^n\, u[n]$	$a^n s_+^1[n]$	
$s_+^{N_1}[n]$	$s_+^{N_2}[n]$	$s_+^{N_1+N_2+1}[n]$	
$s_+^N[n]a^n$	$b^n\, u[n]$	$\frac{1}{(1-a/b)^{N+1}} \cdot b^n u[n] - \sum_{k=0}^{N} \frac{a/b}{(1-a/b)^{N+1-k}} \cdot s_+^k[n]a^n$	si $a \neq b$

Propriétés de la transformée en z

Opération	Signal discret	Transformée en z
Définition	$f[n]$	$F(z) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]z^{-n}$
Linéarité	$\alpha \cdot f[n] + g[n]$	$\alpha \cdot F(z) + G(z), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
Décalage	$f[n-n_0]$	$z^{-n_0}F(z)$
Retournement	$f[-n]$	$F(1/z)$
Sur-échantillonnage	$(\uparrow M)f[n]$	$F(z^M)$
Sous-échantillonnage	$(M\downarrow)f[n]$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} F\left(z^{1/M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k}{M}}\right)$
Multiplication par a^n	$a^n \cdot f[n]$	$F(z/a)$
Multiplication par n	$n \cdot f[n]$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$
Convolution	$(f_1 * f_2)[n]$	$F_1(z)\cdot F_2(z)$

Table de transformées en z

$f[n]$	$F(z)$	ROC = zone de convergence
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	$\mathbb{C}\backslash\{0\}$ si $n_0>0$, ou $\mathbb{C}$ si $n_0 \le 0$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert > 1\}$
$s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert > 1\}$
$a^n\, u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert > \lvert a\rvert\}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert < \lvert a\rvert\}$
$a^n s_+^N[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert > \lvert a\rvert\}$
$(-1)^{N+1}a^n s_+^N[-n-N-1]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^{N+1}}$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert < \lvert a\rvert\}$
$\frac{P^{(n)}(0)}{n!}u[n]$	$P(z^{-1})$	$\{z\in\mathbb{C}: \lvert z\rvert > \rho_+\}$

série de Taylor de $P(x)$ avec $x = z^{-1}$ en $x=0$ — pour $x \mapsto P(x)$ analytique en $\{x\in\mathbb{C}: |x| < 1/\rho_+\}$

- **Fonction de transfert rationnelle**

$$H(z) = z^{-n_0}\frac{B(z)}{A(z)} = z^{-n_0}\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} = z^{-n_0} b_0 \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - z_{0,m} z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - z_{\mathrm{p},n} z^{-1})}$$

  - **Forme canonique** avec $n_0 \in \mathbb{Z}$, $b_0, b_M, a_N \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et telle que les ***polynômes*** $\left(z^M B(z)\right) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M$ et $\left(z^N A(z)\right) = z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N$ de degrés M et N soient premiers entre eux.
  - **Zéros** $(z_{0,m})_{m=1}^{M}$: racines de $\left(z^M B(z)\right) \quad \Leftrightarrow \quad B(z_{0,m}) = 0$
  - **Pôles** $(z_{\mathrm{p},n})_{n=1}^{N}$: racines de $\left(z^N A(z)\right) \quad \Leftrightarrow \quad A(z_{\mathrm{p},n}) = 0$
  - Système **causal-stable** $\quad \Leftrightarrow \quad |z_{\mathrm{p},n}| < 1, \ \forall n = 1, \dots, N$

$$f[\cdot] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow g = (h * f)[\cdot]$$

- **Implémentation récursive:** $\quad g[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m f[n - m - n_0] - \sum_{k=1}^{N} a_k g[n-k]$

Justification: $\quad G(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = F(z)\left(\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m-n_0}\right)$

Transformée de Fourier en temps discret

- **Définition:** $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
  - Lien avec la transformée en z

$$\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n] z^{-n}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} \quad \text{si} \quad \mathrm{ROC} \supset \{z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} : \omega \in \mathbb{R}\}$$

  - Lien avec la transformée de Fourier en temps continue $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega)$

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\delta(t - nT)\right\}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

- **Relation de symétrie**
  - Symétrie Hermitienne: $\quad f[n]$ réel $\quad \Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \left(F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)^*$
  - Symétrie en n_0: $\quad f[n] = f[n_0 - n] \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n_0\omega} F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}), \quad n_0 \in \mathbb{Z}$
  - Antisymétrie en n_0: $\quad f[n] = -f[n_0 - n] \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n_0\omega} F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}), \quad n_0 \in \mathbb{Z}$

	Signal discret	DTFT (Fourier discret)
Définition	$f[n]$	$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
Renversement	$\big(f[n]\big)^{\vee} = f[-n]$	$F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^{\vee}$
Conjugué	$\big(f[n]\big)^{*}$	$\big(F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\big)^{*}$
Décalage	$f[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Modulation	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}f[n]$	$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$
Mult. par monône	$n^k f[n]$	$\mathrm{j}^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\omega^k}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Convolution	$(h*f)[n]$	$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Multiplication	$f[n]g[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi})G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\xi)})\mathrm{d}\xi$
Somme	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]$	$= \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big\vert_{\omega=0} = F(1)$
Parseval	$\langle f,g\rangle_{\ell_2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\big(g[n]\big)^{*}$	$= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big(G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big)^{*}\mathrm{d}\omega$

Signal discret	DTFT (Fourier discret)
$\frac{1}{2\pi}$	$\delta_{\mathrm{perio}}(\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\omega + 2\pi m)$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$	$(2\pi)\delta_{\mathrm{perio}}(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi\delta_{\mathrm{perio}}(\omega+\omega_0) + \pi\delta_{\mathrm{perio}}(\omega-\omega_0)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\mathrm{j}\pi\left(\delta_{\mathrm{perio}}(\omega+\omega_0) - \delta_{\mathrm{perio}}(\omega-\omega_0)\right)$
$\delta[n-n_0], \quad n_0\in\mathbb{Z}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}$
$u[n] = \mathbb{1}_{+}[n] = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} + \pi\delta_{\mathrm{perio}}(\omega)$
$\mathbb{1}_{[-N\ldots N]}[n] = \begin{cases} 1, & \vert n\vert \leq N \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$
$\mathrm{e}^{\alpha n}u[n], \quad \mathrm{Re}(\alpha) < 0$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{j}\omega}}$
$\frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!}\,\mathrm{e}^{\alpha n}u[n], \quad \mathrm{Re}(\alpha)<0$	$\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{j}\omega}}\right)^{N}$

Transformée de Fourier discrète (DFT)

- Transformation directe d'un signal de période N

$$\mathbf{DFT}\{f\}[m] = F[m] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{Z}$$

- Transformation matricielle équivalente: $\mathbf{F} = \mathbf{A}_{\mathrm{DFT}} \cdot \mathbf{f}$
  - Vecteur signal: $\mathbf{f} = (f[n])_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$
  - Coefficients de Fourier: $\mathbf{F} = (F[m])_{m=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$
  - Matrice de transformation $\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ avec $[\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}]_{m,n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n}$

- Transformation inverse

$$f[n] = \mathbf{DFT}^{-1}\{F\}[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}m} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}^{-1}\mathbf{F} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}^{-1} = \tfrac{1}{N}(\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}^{*})^{T}$$

Propriétés de la DFT

Opération	Signal discret	$\mathbf{DFT}$
N-périodicité	$f[n+N] = f[n]$	$F[m+N] = F[m]$
Décalage	$f[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\frac{2\pi}{N}m)n_0} \cdot F[m]$
Retournement	$f[-n]$	$F[-m]$
Modulation	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}m_0\frac{2\pi}{N}n} \cdot f[n]$	$F[m-m_0]$
Conjugaison	$f[n]^*$	$F[-m]^*$
Dualité	$F[n]$	$N \cdot f[-m]$
Convolution cyclique	$\sum_{k=0}^{N-1} f[k] \cdot g[n-k]$	$F[m] \cdot G[m]$
Multiplication	$f[n] \cdot g[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot G[m-k]$

- Relation de Parseval: $$\sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot g[n]^* = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m] \cdot G[m]^*$$

Processus stochastiques

Le processus $X(\cdot)$ (réel) est stationnaire au sens large (SSL) ssi:

- $\forall t \in \mathbb{R}: \quad \mathbb{E}\{X(t)\} = \mu_X =$ Constante
- $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}: \quad \mathbb{E}\{X(t_1)X(t_2)\} = \rho_X(t_2 - t_1) \; = \rho_X(t_1 - t_2)$

■ Fonction d'autocorrélation statistique $\rho_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\rho_X(\tau) \triangleq \mathbb{E}\{X(0)X(\tau)\} \quad = \mathbb{E}\{X(t)X(\tau + t)\}, \forall t \in \mathbb{R}$$

■ Densité spectrale de puissance

$$S_X(\omega) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\mathbb{E}\{|\hat{X}_A(\omega)|^2\} \quad \text{avec} \quad \hat{X}_A(\omega) = \int_{-A/2}^{A/2} X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

■ Théorème de Wiener-Khintchine

$$S_X(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \rho_X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \mathcal{F}\{\rho_X\}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\{|X(t)|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \quad \text{(énergie moyenne du signal)}$$

Filtrage statistique

■ Filtrage réel d'un processus stochastique SSL : $Y(t) = (h * X)(t)$

- $X(\cdot)$ SSL $\Rightarrow Y(\cdot)$ SSL
- $\rho_Y(t) = (h * h^\vee * \rho_X)(t)$ avec $h^\vee(t) = h(-t)$
- $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega)$

■ Bruit blanc: $B(\cdot)$ SSL à moyenne nulle avec $S_B(\omega) = \sigma_0^2$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\{B(t)\} = 0 \;\text{ et }\; \mathbb{E}\{B(t)B(t')\} = \sigma_0^2\delta(t - t')$$

■ Somme de processus aléatoires mutuellement indépendants

$X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ SSL à moyenne nulle avec $\mathbb{E}\{X(t)Y(t')\} = 0, \forall t, t' \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X(\cdot) + Y(\cdot)$ SSL à moyenne nulle avec DSP $S_{X+Y}(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega)$

■ Filtre de Wiener: $H_W(\omega) = \dfrac{S_X(\omega)}{S_X(\omega) + S_B(\omega)}$

- Modèle stochastique de mesure: $Y(t) = X(t) + B(t)$
- Estimateur: $\tilde{X}(t) = (h_W * Y)(t)$ tel que $\mathbb{E}\{|\tilde{X}(t) - X(t)|^2\}$ minimum

Processus stochastiques discrets

Le processus $X[\cdot]$ (réel) est stationnaire au sens large (SSL) ssi:

- $\forall n \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{E}\{X[n]\} = \mu_X =$ Constante
- $\forall m, n \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{E}\{X[m]X[n]\} \triangleq \rho_X[n-m] \quad = \rho_X[m-n]$

- Fonction d'autocorrélation statistique discrète $\rho_X : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$$\rho_X[n] \triangleq \mathbb{E}\{X[0]X[n]\} \quad = \mathbb{E}\{X[m]X[n+m]\}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

- Densité spectrale de puissance (2π-périodique)

$$S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K} \mathbb{E}\{|\hat{X}_K(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\} \quad \text{avec} \quad \hat{X}_K(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-K}^{K} X[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

- Théorème de Wiener-Khintchine discret

$$S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_X[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{\rho_X\}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\{|X[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{d}\omega \quad \text{(énergie moyenne du signal)}$$

Filtrage statistique en temps discret

- Filtrage réel d'un processus stochastique SSL : $Y[n] = (h * X)[n]$
  - $X[\cdot]$ SSL $\Rightarrow Y[\cdot]$ SSL
  - $\rho_Y[n] = (h * h^\vee * \rho_X)[n] \quad$ avec $\quad h^\vee[n] = h[-n]$
  - $S_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

- Bruit blanc discret: $B[\cdot]$ SSL à moyenne nulle avec $S_B(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sigma_0^2$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\{B[n]\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\{B[n]B[n']\} = \sigma_0^2\delta[n-n']$$

- Somme de processus aléatoires mutuellement indépendants

  $X[\cdot]$ et $Y[\cdot]$ SSL à moyenne nulle avec $\mathbb{E}\{X[m]Y[n]\} = 0, \forall m, n \in \mathbb{Z}$

  $\Rightarrow X[\cdot]+Y[\cdot]$ SSL à moyenne nulle avec DSP $S_{X+Y}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+S_Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

- Filtre de Wiener discret: $H_W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \dfrac{S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}{S_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + S_B(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}$
  - Modèle stochastique de mesure: $Y[n] = X[n] + B[n]$
  - Estimateur: $\tilde{X}[n] = (h_W * Y)[n]$ tel que $\mathbb{E}\{|\tilde{X}[n] - X[n]|^2\}$ minimum